

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО
МАТЕМАТИКА

19 май 2009 г. – Вариант 1

УВАЖАЕМИ ЗРЕЛОСТНИЦИ,

Тестът съдържа **28 задачи** по математика от **два вида**:

- 20 задачи със структуриран отговор с четири възможни отговора, от които само един е верен;
- 8 задачи със свободен отговор.

Първите 20 задачи (от 1. до 20. включително) в теста са от затворен тип с четири възможни отговора, обозначени с главни букви от А до Г, от които само един е верен. Отговорите на тези задачи отбелязвайте със син/черен цвят на химикалката в **листа за отговори**, а не върху тестовата книжка. Отбелязвайте верния отговор със знака **X** в кръгчето с буквата на съответния отговор. Например:

А Б В Г

Ако след това прецените, че първоначалният отговор не е верен и искате да го поправите, запълнете кръгчето с грешния отговор и отбележете буквата на друг отговор, който приемате за верен. Например:

А Б В Г

За всяка задача трябва да е отбелязан не повече от един действителен отговор. Като действителен отговор на съответната задача се приема само този, чиято буква е отбелязана със знака X.

Отговорите на задачите със свободен отговор (от 21. до 28. вкл.) запишете в предоставения свитък за свободните отговори, като за задачи от 26. до 28. вкл. запишете пълните решения с необходимите обосновки.

ПОЖЕЛАВАМЕ ВИ УСПЕШНА РАБОТА!

Отговорите на задачите от 1. до 20 вкл. отбелязвайте в листа за отговори!

1. Дадени са безкрайните десетични периодични дроби $P = 0,(15)$ и $Q = 0,(151)$.

Вярно е, че:

А) $P > Q$ Б) $P < Q$ В) $P = Q$ Г) P и Q не могат да се сравнят

2. Стойността на израза $P = \sqrt{(5 - 4\sqrt{3})^2} + (\sqrt{3} - 2)^2$ е:

А) $12 - 8\sqrt{3}$ Б) 2 В) $2 + 4\sqrt{3}$ Г) $12 - 4\sqrt{3}$

3. Допустимите стойности за израза $\left(\frac{1}{2x-1} + \frac{3x}{1-x^2}\right) : (x+2)$ са:

А) $x \neq 0,5; 1$ Б) $x \neq 0,5; \pm 1$ В) $x \neq 0,5; \pm 1; 2$ Г) $x \neq 0,5; \pm 1, -2$

4. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - x - 20 = 0$, x_3 и x_4 са корените на уравнението $1 - 20x^2 - x = 0$, то е вярно, че:

А) $x_1 \cdot x_2 = x_3 \cdot x_4$ Б) $\frac{1}{x_1 \cdot x_2} = x_3 + x_4$

В) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -1$ Г) $x_1 \cdot x_2 = -x_3 \cdot x_4$

5. Колко общи точки имат графиките на функциите $f(x) = x^2 - 3x + 2$ и $g(x) = x^2 + 5x - 6$?

А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3

6. Корените на уравнението $\sqrt{1-x} = 5+x$ са:

А) -3 и -8 Б) -8 В) -3 Г) няма реални корени

7. Стойността на израза $\log_3 27 - \lg \frac{1}{100} - \log_5 1$ е равна на:

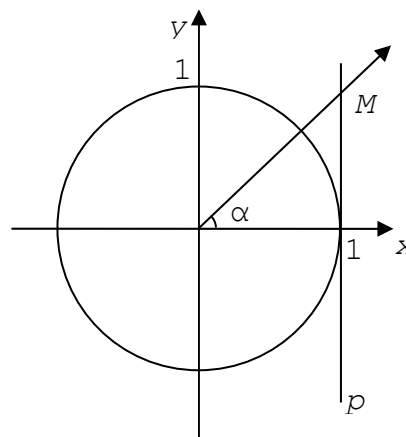
А) 0 Б) 1 В) 4 Г) 5

8. Решенията на неравенството $\frac{1}{x^2+1} < 1$ са:

А) $x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ Б) $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$

В) $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ Г) $x \in (-\infty; +\infty)$

9. На чертежа е построена единичната окръжност и права p , която се допира до окръжността в точка с абсциса 1. Едното рамо на ъгъл α пресича правата p в точка M , както е показано. За ъгъл α ординатата на точка M е стойността на функцията:



- А) синус
 Б) косинус
 В) тангенс
 Г) котангенс

10. Дадена е окръжност $k(O, r = 2 \text{ cm})$ и точки A и B от окръжността, такива че дължината на дъгата AB е $2,5 \text{ cm}$. Мярката на острия $\angle AOB$ е:

- А) $0,25 \text{ rad}$ Б) $1,25 \text{ rad}$ В) 2 rad Г) $2,5 \text{ rad}$

11. За геометричната прогресия a_1, a_2, \dots, a_6 е известно, че $a_3 \cdot a_4 = -3$.

Произведението $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6$ е равно на:

- А) 27 Б) 9 В) -9 Г) -27

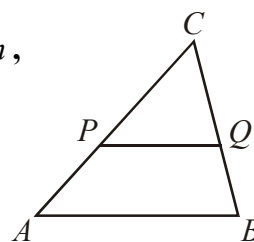
12. Нека Q_1 е множество от 100 рационални числа и x е случайно избрано число от

Q_1 . Вероятността числото $q = \sqrt{(1+x)^2}$ да е ирационално, е:

- А) 0 Б) $\frac{1}{2}$ В) 1 Г) невъзможно да се определи

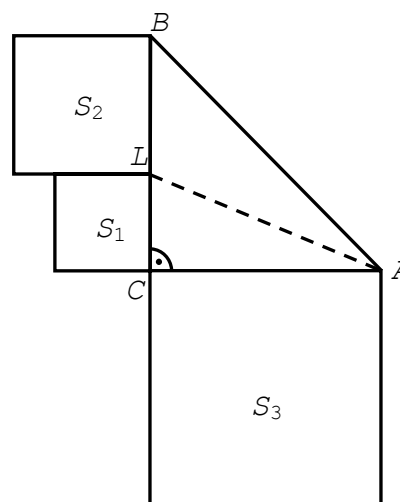
13. На чертежа $AP:PC = 2:3$ и $PQ \parallel AB$. Ако $AB = 15 \text{ cm}$, то дължината на PQ е:

- А) 6 cm Б) 9 cm
 В) 10 cm Г) $21,5 \text{ cm}$



14. На чертежа $\triangle ABC$ е правоъгълен и равнобедрен, AL е ъглополовящата на $\angle CAB$, а S_1, S_2 и S_3 са лицата на построените квадрати. Вярно е, че:

- А) $2S_1 < S_2$ Б) $2S_1 > S_2$
 В) $S_3 = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)S_2$ Г) $S_1 + S_2 > S_3$



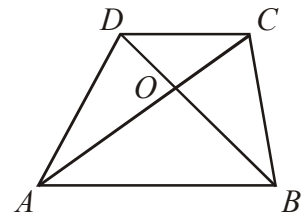
15. Ако за четириъгълника $ABCD$ на чертежа е дадено , че $S_{AOD} : S_{DOC} = 3 : 1$ и $DO : DB = 1 : 4$, то НЕ Е вярно, че :

А) $DC \parallel AB$

Б) $S_{AOD} = S_{OBC}$

В) $S_{AOB} : S_{DOC} = 3 : 1$

Г) $S_{DOC} : S_{BCO} = 1 : 3$



16. Лицето на равнобедрен триъгълник с дължини на бедрото и на основата съответно 5 cm и 2 cm е:

А) $2\sqrt{6}\text{ cm}^2$

Б) $4\sqrt{6}\text{ cm}^2$

В) 12 cm^2

Г) $2\sqrt{3}\text{ cm}^2$

17. Ако най-голямата страна в разностранния $\triangle ABC$ е $AB = R$, където R е радиусът на описаната окръжност, то мярката на вътрешния ъгъл при върха C е:

А) 30°

Б) 150°

В) 60°

Г) 120°

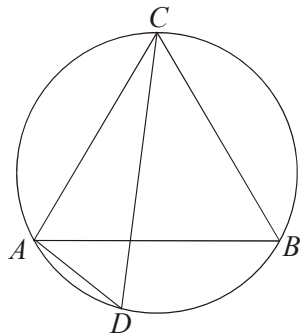
18. Триъгълникът ABC на чертежа е равностранен с дължина на страната 19 cm и $AD = 5\text{ cm}$. Дължината на хордата CD е:

А) 20 cm

Б) $20\sqrt{3}\text{ cm}$

В) 21 cm

Г) $21\sqrt{3}\text{ cm}$



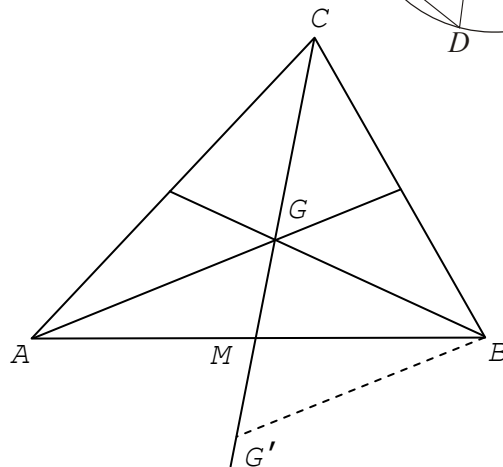
19. Точката G е медицентърът на $\triangle ABC$, точката G' е симетричната на G относно средата M на страната AB . Ако $S_{BMG'} = 4$, то S_{ABC} е:

А) 12

Б) 24

В) 28

Г) 36



20. Равнобедрен трапец с основи $AB = 50\text{ cm}$ и $CD = 10\text{ cm}$, и бедро $AD = 29\text{ cm}$ има височина:

А) 20 cm

Б) 21 cm

В) 30 cm

Г) 41 cm

Отговорите на задачите от 21. до 25. вкл. запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Стойността на израза $A = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x + 5\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\left(\frac{1}{2}\right)^y}$ е по-голяма от 6.

Запишете по-голямото от числата x и y .

22. В банка била вложена сума пари, при годишна сложна лихва 3%. След три години сумата нараснала на 21 854 лева и 54 стотинки. Каква сума в лева е била вложена първоначално?

23. Намерете стойността на израза $tg15^\circ + cotg15^\circ$.

24. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ с бедра $AC = BC = 5$ cm и основа $AB = 8$ cm .
Намерете дължината на радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

25. Намерете броя на мобилните телефонни номера от вида $0887****ab$, последните две цифри на които образуват двуцифрено число \overline{ab} , което е точен квадрат, а двуцифреното число, записано със същите цифри, но в обратен ред, е просто число.

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. вкл. запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Решете уравнението $\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x+2}} = 4$.

27. Иван има в джоба си 2 монети по 10 ст., 4 монети по 20 ст., 4 монети по 50 ст. и 2 монети по 1 лв. Той изважда едновременно три монети по случаен начин. Каква е вероятността трите монети да са на обща стойност 1,20 лв?

28. В $\triangle ABC$ медианата AM и ъглополовящата BL са перпендикулярни и имат една и съща дължина, равна на 4. Да се намери $P_{\triangle ABC}$.

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\text{Формули на Виет} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Квадратна функция

Графиката на $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ е парабола с връх точката $(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a})$

Корен. Степен и логаритъм

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| \quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a; \quad \text{при } k \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}; \quad \text{при } a > 0, n \geq 2, k \geq 2 \text{ и } n, m, k \in \mathbb{N}$$

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \quad \log_a a^x = x \quad a^{\log_a b} = b; \quad \text{при } b > 0, a > 0, a \neq 1$$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n = 1.2.3 \dots (n-1)n = n!$

Брой на вариациите на n елемента k -ти клас: $V_n^k = n.(n-1) \dots (n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k -ти клас: $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n.(n-1) \dots (n-k+1)}{1.2.3 \dots (k-1)k}$

Вероятност $P(A) = \frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}} \quad 0 \leq P(A) \leq 1$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Геометрична прогресия: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

Формула за сложна лихва: $K_n = K \cdot q^n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1c$ $b^2 = b_1c$

$h_c^2 = a_1b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

Формула за медиана: $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$ $m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$

$m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^2 = ab - nm$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab \sin \alpha$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α^0	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg} \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\operatorname{cotg} \beta \pm \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$