**<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА</u>**

**ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО**

**МАТЕМАТИКА**

**23.05.2013 Г. – <u>ВАРИАНТ 1</u>**

*<u>Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!</u>*

**1. Най-малко е числото:**

**А)** $\left(\frac{7}{6}\right)^2$ **Б)** $1$ **В)** $\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ **Г)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

**2. Стойността на израза** $\frac{x+3}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}+\frac{x-2013}{x+3}$ **за** $x=2013$ **е равна на:**

**А)** $2$ **Б)** $1$ **В)** $0$ **Г)** $-2013$

**3. Допустимите стойности на израза** $\frac{\sqrt{|x|}}{x}$ **са:**

**А)** $(-\infty;+\infty)$ **Б)** $[0;+\infty)$ **В)** $(-\infty;0]$ **Г)** $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

**4. Числото** $\log_2 3$ **е корен на уравнението:**

**А)** $3^x=2$ **Б)** $2^x=3$ **В)** $3^x=\frac{1}{2}$ **Г)** $2^x=\frac{1}{3}$

**5. На кое от уравненията сборът от реалните корени е** $2{,}5$**?**

**А)** $2x^2-5x+5=0$ **Б)** $2x^2-5x+3=0$

**В)** $2x^2-2x+5=0$ **Г)** $2x^2+5x-3=0$

**6. Решенията на неравенството** $x^2-2x+3>0$ **са:**

**А)** $x\in\varnothing$ **Б)** $x\in(-\infty;-1)\cup(3;\infty)$

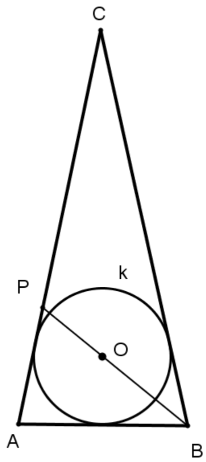
**В)** $x\in(-\infty;-3)\cup(1;\infty)$ **Г)** $x\in(-\infty;\infty)$

**7. Стойността на** $\sin 240°$ **е:**

**А)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **Б)** $-\frac{1}{2}$ **В)** $\frac{1}{2}$ **Г)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**8. В равнобедрен** $\triangle ABC\left(AC = BC\right)$ **е вписана окръжност** $k$ **с център** $O$**.**

**Лъчът** $BO^{\rightarrow}$ **пресича страната** $AC$ **в точка** $P$**, като** $AP = 6\text{ cm}$ **и** $PC = 12\text{ cm}$**. Периметърът на** $\triangle ABC$ **е :**




**А)** $72\text{ cm}$ **Б)** $45\text{ cm}$

**В)** $9\text{ cm}$ **Г)** невъзможно да се определи

**9. В** $\triangle ABC$ $AB = 7$ cm**, а** $AC = 5$ cm**. Ако** $\angle ACB = 120°$**, то дължината на страната** $BC$ **е:**

**А)** 3 cm **Б)** 6 cm **В)** $\sqrt{39}$ cm **Г)** 8 cm

**10. Ако общият член на числова редица е** $a_n = \left(-1\right)^{n+1}(n+1) - 3.(-1)^n$**, то** $a_{13}$ **е равен на:**

**А)** –16 **Б)** –11 **В)** 10 **Г)** 17

**11. Дадена е крайна геометрична прогресия с** $a_1 = 729$**,** $q = \frac{1}{3}$ **и** $a_n = \frac{1}{9}$**. Броят** $n$ **на членовете на прогресията е:**

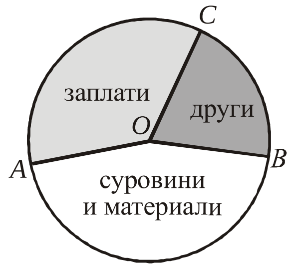
**А)** 5 **Б)** 7 **В)** 8 **Г)** 9

**12. Наредените двойки числа** $\left(x; y\right)$**, които са решения на системата** $\left| \begin{array}{l} y = 6 - x^2 \\ y = -x \end{array} \right.$**, са разположени:**

**А) само в първи квадрант** **Б) само в четвърти квадрант**

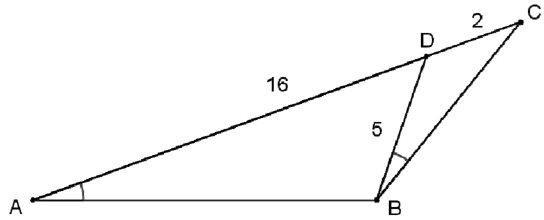
**В) във втори и в четвърти квадрант** **Г) в първи и в трети квадрант**

**13. Разходите на фирма за един месец са** 18 000 лв. **Тяхното разпределение е представено чрез кръговата диаграма. Ако** $\angle AOB = 170^\circ$ **и** $\angle BOC = 64^\circ$**, то разходите за заплати са:**




**А)** 3200 лв. **Б)** 6000 лв. **В)** 6300 лв. **Г)** 8500 лв.

**14. На страната** $AC$ **на** $\triangle ABC$ **е взета точка** $D$**, така че** $\angle DBC = \angle CAB$**. Ако** $AD = 16$ cm**,** $DC = 2$ cm **и** $BD = 5$ cm**, то дължината на страната** $AB$ **е равна на:**




**А)** 6 cm **Б)** 15 cm **В)** $\frac{55}{3}$ cm **Г)** 36 cm

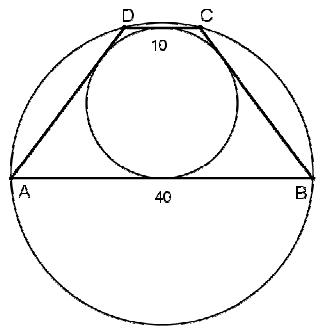
**15. За** $\triangle ABC$ **е дадено, че** $AB = 5$ **и** $\sin\angle CAB : \sin\angle CBA = 3:2$**. Ако** $AC^2 + BC^2 = 117$**, то периметърът на триъгълника е:**

**А)** 20 **Б)** 18 **В)** $5+3\sqrt{17}$ **Г)** $5+3\sqrt{85}$

**16. Височината към хипотенузата в правоъгълен триъгълник има дължина** 6 cm **и сключва с един от катетите ъгъл** 30°**. Лицето на триъгълника е:**

**А)** 18 cm$^2$ **Б)** 36 cm$^2$ **В)** $24\sqrt{3}$ cm$^2$ **Г)** $48\sqrt{3}$ cm$^2$

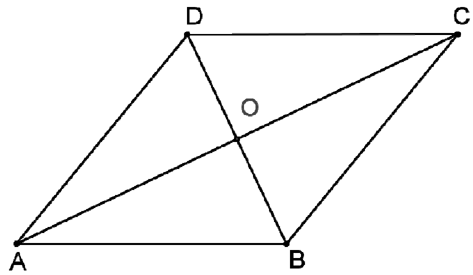
**17. Около трапеца** $ABCD$ **с основи** $AB = 40$ cm **и** $CD = 10$ cm **е описана окръжност. Ако в трапеца е вписана окръжност, то дължината на нейния радиус е:**




**А)** 10 cm **Б)** 15 cm

**В)** 20 cm **Г)** друг отговор

**18. Дължината на единия диагонал на ромб е** $75\%$ **от дължината на другия, а лицето му е** $24\ \text{cm}^2$**. Радиусът на вписаната в ромба окръжност е:**




**А)** $8\ \text{cm}$ **Б)** $6\ \text{cm}$

**В)** $4,8\,\text{cm}$ **Г)** $2,4\ \text{cm}$

**19. В** $\triangle ABC$ $AB=8,\ AC=15$ **и** $\angle BAC=60^\circ$**. Височината** $AH\ (H\in BC)$ **на триъгълника е:**

**А)** $\frac{60}{13}$ **Б)** $\frac{60\sqrt{3}}{13}$ **В)** $\frac{60\sqrt{3}}{7}$ **Г)** $\frac{120\sqrt{3}}{13}$

**20. Колко са трицифрените четни числа с различни цифри, цифрата на десетиците на които е нула?**

**А)** 32 **Б)** 36 **В)** 45 **Г)** 72

*Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!*

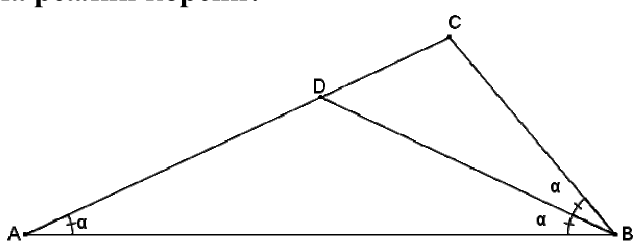
**21. Намерете решенията на неравенството** $(x+6)(36-x^2)\le 0$.

**22. Да се реши уравнението** $\frac{x}{2-x}+\frac{x+4}{x^2-x-2}=2$.

**23. В серия от** 30 **опита участник в стрелба по цел е получил** 13,5 **наказателни точки. Колко попадения е реализирал участникът, ако за първия пропуск наказанието е една точка, а всеки следващ пропуск се наказва с половин точка повече от предходното наказание?**

**24. Коефициентът** $c$ **на квадратното уравнение** $x^2-2x+c=0$ **е цяло число от интервала** $[-2;\ 3]$**. Каква е вероятността уравнението да има реални корени?**

**25. Даден е** $\triangle ABC$ **с ъглополовяща** $BD$**. Ако** $\angle ABC=2\angle CAB,\ AC=3CD=18$**, намерете** $S_{ABC}$.



*Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!*

**26. Намерете корените на уравнението $x^2-2x=t$, където $t$ е решение на уравнението $\sqrt{t+1}-\sqrt{2t-5}=1$.**

**27. Да се докаже, че ако $\alpha,\beta$ и $\gamma$ са ъгли в триъгълник, то е изпълнено тъждеството $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.**

**28. В остроъгълния $\triangle ABC$ медианата $AM$ $(M\in BC)$ и височината $CH$ $(H\in AB)$ са съответно равни на $6\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$ и $12\ \mathrm{cm}$. Ако страната $BC=20\,\mathrm{cm}$, намерете дължината на радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.**

# ФОРМУЛИ

## Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$  $D=b^2-4ac$  $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$  Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$  $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

## Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

## Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$  $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m},\ a\neq 0$  $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$  $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$  $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x$  $a^{\log_a b}=b$  $\log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 1$

## Комбинаторика

Брой на пермутациите на $n$ елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на $n$ елемента $k$-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на $n$ елемента $k$-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието $A$:

$$p(A)=\frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

## Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d$  $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1}$  $S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

## Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c^{\ 2} = a_1 b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a^{\ 2} = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b^{\ 2} = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$ $m_c^{\ 2} = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^{\ 2} = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

## Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

## Тригонометрични функции

| $\alpha°$ | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ rad | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | – |
| $\operatorname{cotg}\alpha$ | – | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

| | $-\alpha$ | $90°-\alpha$ | $90°+\alpha$ | $180°-\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| sin | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ |
| cos | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ |
| tg | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{cotg}\alpha$ | $-\operatorname{cotg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ |
| cotg | $-\operatorname{cotg}\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{cotg}\alpha$ |

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА**

**ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО**

**Математика – 23 май 2013 г.**

**ВАРИАНТ 1**

**Ключ с верните отговори**

**Въпроси с изборен отговор**

| Въпрос № | Верен отговор | Брой точки |
|---|---|---|
| **1** | **В** | 2 |
| **2** | **В** | 2 |
| **3** | **Г** | 2 |
| **4** | **Б** | 2 |
| **5** | **Б** | 2 |
| **6** | **Г** | 2 |
| **7** | **А** | 2 |
| **8** | **Б** | 2 |
| **9** | **А** | 2 |
| **10** | **Г** | 2 |
| **11** | **Г** | 3 |
| **12** | **В** | 3 |
| **13** | **В** | 3 |
| **14** | **Б** | 3 |
| **15** | **А** | 3 |
| **16** | **В** | 3 |
| **17** | **А** | 3 |
| **18** | **Г** | 3 |
| **19** | **Б** | 3 |
| **20** | **А** | 3 |
| **21** | $x \in [6;+\infty) \cup \{-6\}$ | 4 |
| **22** | $x_1 = -\frac{4}{3}$ | 4 |
| **23** | 24 | 4 |
| **24** | $\frac{2}{3}$ | 4 |
| **25** | $S_{ABC} = 54\sqrt{3}$ | 4 |
| **26** | $t = 3,\ x_1 = -1, x_2 = 3$ | 10 |
| **27** | - | 10 |
| **28** | $R = \frac{10\sqrt{10}}{3}$ | 10 |

**Въпроси с решения**

**26. Критерии за оценяване:**

1. Получаване на уравнението $\sqrt{t+1}=1+\sqrt{2t-5}$ (1 т.)

2. Получаване на уравнението $2\sqrt{2t-5}=5-t$ (2 т.)

3. Получаване на уравнението $t^2-18t+45=0$ (1 т.)

4. Намиране на корените $t_1=15,\ t_2=3$ на квадратното уравнение (2 т.)

5. Проверка дали $t_1=15,\ t_2=3$ са корени на ирационалното уравнение (2 т.)

6. Намиране на корените $x_1=-1,\ x_2=3$ на уравнението $x^2-2x=3$ (2 т.)

*Забележка*. Ако решаването на съответните ирационални уравнения е свързано с еквивалентни преобразования, двете точки за проверка се добавят към получените точки за решаване на уравненията.

**27. Критерии за оценяване:**

1. За използване на $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ (1 т)
2. За изразяване на $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$ (1 т.)
3. За преобразуване на $\sin\alpha+\sin\beta$ или $\sin\alpha-\sin\gamma$ в произведение (2 т.)
4. За изразяване на $\sin\gamma=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ (1 т.)
5. За изнасяне пред скоби на общ множител (1 т.)
6. За преобразуване на разлика на косинуси в произведение (2 т.)
7. За довършване на преобразуванията и доказване на тъждеството (2 т.)

**28. Критерии за оценяване:**

**I начин**

1. Прилагане на Питагорова теорема за $\triangle HBC$ и намиране $HB=16\,\text{cm}$ (1 т.)
Означаване $AH=x$ и $AC=y$
2. Прилагане на формула за медианата $AM$

$$\left(6\sqrt{5}\right)^2=\frac{1}{4}\left[2(x+16)^2+2y^2-400\right]$$

и получаване на уравнението $(x+16)^2+y^2-560=0$ (2 т.)
3. Прилагане на Питагорова теорема за $\triangle AHC$
и получаване на уравнението $x^2+144=y^2$ (1 т.)
4. Съставяне на системата $\left|\begin{array}{l}x^2+144=y^2\\(x+16)^2+y^2-560=0\end{array}\right.$ (1 т.)

5. Решение на системата и намиране $x = 4$ и $y = 4\sqrt{10}$ (2 т.)

6. Намиране на $\sin\angle ABC = \frac{3}{5}$ (1 т.)

7. Прилагане на синусова теорема за $\triangle ABC$ и намиране на $R = \frac{10\sqrt{10}}{3}$ (2 т.)

**II начин:**

1.Прилагане на Питагорова теорема за $\triangle HBC$ и намиране $HB = 16\,\text{cm}$ (1 т.)

2. Изразяване на $\sin\angle ABC = \frac{3}{5}$ (1 т.)

3. Намиране на $\cos\angle ABC = \frac{4}{5}$ (2 т.)

4. Прилагане на косинусова теорема за $\triangle ABM$ и намиране на $AB = 20\,\text{cm}$ и $AH = 16\,\text{cm}$ (2 т.)

5. Прилагане на косинусова теорема за $\triangle ABC$ и намиране на $AC = 4\sqrt{10}\,\text{cm}$ (2 т.)

6. Прилагане на синусова теорема за $\triangle ABC$ (1 т.)

7. Намиране $R = \frac{10\sqrt{10}}{3}$ (1 т.)